

Mathéo  
Beaudouin  
L3 Informatique

TD 3

Résolution de systèmes linéaires  
par des méthodes itératives.

Exercice 6:

On veut résoudre  $Ax=b$  avec  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  inversible et  $b \in \mathbb{R}^n$   
On part du vecteur initial  $x = (0,0,0)$

Nous allons appliquer la méthode de Jacobi pour  
résoudre le système à 0,1 près. La solution  $(2,1,1)^t$

Voici le système linéaire:

$$\begin{cases} 6x - 2y + z = 11 \\ x + 2y - 5z = -1 \\ -2x + 7y + 2z = 5 \end{cases}$$

ce qui donne en écriture matricielle:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}}_b$$

$$\Leftrightarrow AX=b$$

• Montrons que cette méthode itérative converge. Pour cela  
montrons que  $A$  est à diagonale strictement dominante.

On va montrer que:  $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$



②

On a  $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$  et  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Pour  $i=1$ ,  $|a_{11}|=6$  et  $|a_{12}|=2$  et  $|a_{13}|=1$

On a bien  $|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}|$  car  $6 > 3$

Pour  $i=2$ ,  $|a_{22}|=2$  et  $|a_{21}|=1$  et  $|a_{23}|=5$

or  $|a_{21}| + |a_{23}| = 6$  donc  $|a_{22}| < |a_{21}| + |a_{23}|$

$2 < 6$

donc  $A$  n'est pas à diagonale strictement dominante.

Permutations  $L_2$  et  $L_3$

$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$  donc pour  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Pour  $i=1$ , cela ne change pas.

~~Pour~~ Maintenant  $i=2$ ,  $|a_{22}|=7$  et  $|a_{21}|=2$  et  $|a_{23}|=2$

on  $|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}|$

Ainsi  $|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}|$

Pour  $i=3$ ,  $|a_{33}|=5$  et  $|a_{31}|=1$  et  $|a_{32}|=2$

on a  $|a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}|$

Donc  $A$  est à diagonale strictement dominante.

Ainsi la méthode de Jacobi converge.



③ Écrivons la matrice  $A$  sous la forme  $A = D - (E + F)$

Avec  $D$  la diagonale de  $A$

$E$  la matrice triangulaire inférieure avec des 0 sur la diagonale.

$F$  la matrice triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.

On retrouve la décomposition  $A = M - N$  avec  $M = D$  et  $N = E + F$  du cours.

$$\text{Ainsi } A = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}}_D - \left( \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}}_E + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_F \right)$$

$$= D - \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

De plus,  $\det(D) = 6 \times 7 \times (-5) = -210 \neq 0$

donc  $D$  est inversible et est bien facile à inverser

$$\text{car } D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{33}} \end{pmatrix}$$

En utilisant le processus itératif

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné} \\ D(x^{(k+1)}) = (E + F)x^{(k)} + b \end{cases}$$

$$\text{Comme } E + F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$\text{On a : } (E + F)x^{(k)} = \begin{pmatrix} 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)} \\ 2x_1^{(k)} - 2x_3^{(k)} \\ -x_1^{(k)} - 2x_2^{(k)} \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



④

$$\text{On a } (G+F)X^{(k)} + b = \begin{pmatrix} 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)} + 11 \\ 2x_1^{(k)} - 2x_3^{(k)} + 5 \\ -x_1^{(k)} - 2x_2^{(k)} - 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{or } DX^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6x_1^{(k+1)} \\ 7x_2^{(k+1)} \\ -5x_3^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

Nous pouvons écrire le système :

$$\begin{cases} x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_1^{(0)} = 0, x_2^{(0)} = 0, x_3^{(0)} = 0 \\ 6x_1^{(k+1)} = 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)} + 11 \\ 7x_2^{(k+1)} = 2x_1^{(k)} - 2x_3^{(k)} + 5 \\ -5x_3^{(k+1)} = -x_1^{(k)} - 2x_2^{(k)} - 1 \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x_1^{(k+1)} = \frac{1}{6} (2x_2^{(k)} - x_3^{(k)} + 11) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{7} (2x_1^{(k)} - 2x_3^{(k)} + 5) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{5} (-x_1^{(k)} - 2x_2^{(k)} - 1) \end{cases}$$

On peut maintenant effectuer la itération.



7.10  
Beaufort

⑤

Pour  $k=0$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{6} (0 - 0 + 11) = \frac{11}{6} \approx 1,8333 \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{4} (5) = \frac{5}{4} \approx 1,25 \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{5} = 0,2 \end{cases}$$

Pour  $k=1$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{6} (2x_2^{(1)} - x_3^{(1)} + 11) = \frac{1}{6} (2 \times \frac{5}{4} - \frac{1}{5} + 11) \approx 2,0381 \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{4} (2x_1^{(1)} - 2x_3^{(1)} + 5) = \frac{1}{4} (2 \times \frac{11}{6} - 2 \times \frac{1}{5} + 5) \approx 1,7810 \\ x_3^{(2)} = \frac{-1}{5} (-x_1^{(1)} - 2x_2^{(1)} - 1) = \frac{-1}{5} (-\frac{11}{6} - 2 \times \frac{5}{4} - 1) \approx 0,8524 \end{cases}$$

Pour  $k=2$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{1}{6} (2x_2^{(2)} - x_3^{(2)} + 11) \approx 2,0849 \\ x_2^{(3)} = \frac{1}{4} (2x_1^{(2)} - 2x_3^{(2)} + 5) \approx 1,0531 \\ x_3^{(3)} = \frac{-1}{5} (-x_1^{(2)} - 2x_2^{(2)} - 1) \approx 1,0800 \end{cases}$$

Pour  $k=3$

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = \frac{1}{6} (2x_2^{(3)} - x_3^{(3)} + 11) \approx 2,0044 \\ x_2^{(4)} = \frac{1}{4} (2x_1^{(3)} - 2x_3^{(3)} + 5) \approx 1,0014 \\ x_3^{(4)} = \frac{-1}{5} (-x_1^{(3)} - 2x_2^{(3)} - 1) \approx 1,0382 \end{cases}$$

On a donc trouvé la solution 0,1 près. En effet la première décimale n'évolue plus en s'arrêtant à  $k=3$ .  
Ainsi  $X^{(4)} = \begin{pmatrix} 2,0044 \\ 1,0014 \\ 1,0382 \end{pmatrix}$  ce qui s'approche de  $(2,1,1)$  donc l'émoué.



⑥

### Exercice 7

Déterminons la méthode la plus rapide entre Jacobi et Gauss-Seidel.

On veut résoudre un système linéaire de la forme  $AX=b$  avec  $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$  inversible et  $b \in \mathbb{R}^m$ .

On part du vecteur initial  $x = (0, 0, 0)^t$ . On ~~résout~~ résoudre le système à 0,1 près.

Voici le système linéaire :

$$\begin{cases} 3x + 4y + z = -17 \\ x - 2y - 6z = 14 \\ x + 6y = 4 \end{cases}$$

ce qui donne en écriture matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -6 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} -17 \\ 14 \\ 4 \end{pmatrix}}_b$$

$$\Leftrightarrow AX=b$$

Montrons que ~~ces~~ méthodes itératives convergent. Pour cela montrons que  $A$  est à diagonale strictement dominante.

On va montrer que :  $\forall i, j \in \llbracket 1, m \rrbracket, |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$



⑦ On a  $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -6 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$  et  $b = \begin{pmatrix} -17 \\ 14 \\ 4 \end{pmatrix}$

pour  $i=1$ ,  $|a_{11}|=9$  et  $|a_{12}|=4$  et  $|a_{13}|=1$

on a bien  $|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}| = 5$

pour  $i=2$   $|a_{22}|=2$  et  $|a_{21}|=1$  et  $|a_{23}|=6$

$$|a_{22}| < |a_{21}| + |a_{23}|$$

$$2 < 7$$

donc  $A$  n'est pas a diagonale strictement dominante.

Permutons  $L_2$  et  $L_3$

$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & -6 \end{pmatrix}$  et  $b = \begin{pmatrix} -17 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix}$

pour  $i=1$ ,  $|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}|$

pour  $i=2$ ,  $|a_{22}|=6$  et  $|a_{21}|=1$  et  $|a_{23}|=1$

donc  $|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}|$

pour  $i=3$ ,  $|a_{33}|=6$  et  $|a_{31}|=1$  et  $|a_{32}|=2$

d'où  $|a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}|$

donc  $A$  est a diagonale strictement dominante.

Donc la méthode de Jacobi converge.

De même pour Gauss-Seidel.



Sur la méthode de Jacobi :

⑧ On décompose  $A = \Pi - N$ , avec  $\Pi$  facile à inverser

$\Pi = D$  = diagonale de  $A$

$N = E + F$  avec  $E$  une matrice triangulaire inférieure avec des 0 sur la diagonale.

$F$  la matrice triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.

d'où  $A = D - (E + F) = D - E - F$

Écrivons donc  $A$  sous la forme  $A = D - (E + F)$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}}_D - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_E + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_F$$

$$= D - \begin{pmatrix} 0 & -4 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec  $\det(D) \neq 0$  car coefficients diagonaux non nuls.  
d'où  $D$  inversible et facile à inverser.

car  $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{33}} \end{pmatrix}$

En utilisant le processus itératif

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné} \\ D(x^{(k+1)}) = (E + F)x^{(k)} + b \end{cases}$$

Comme  $E + F = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$  et  $x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix}$

On a  $(E + F)x^{(k)} = \begin{pmatrix} -4x_1^{(k)} - x_3^{(k)} \\ -x_1^{(k)} \\ -x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)} \end{pmatrix}$



③

Comme  $b = \begin{pmatrix} -17 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix}$

On a  $(E+F)X^{(k)} + b = \begin{pmatrix} -4x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - 17 \\ -x_1^{(k)} + 4 \\ -x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)} + 14 \end{pmatrix}$

et  $DX^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{x_1}^{(k+1)} \\ 6x_2^{(k+1)} \\ -6x_3^{(k+1)} \end{pmatrix}$

Nous pouvons écrire le système:

$$\begin{cases} x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0 \\ g_{x_1}^{(k+1)} = -4x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - 17 \\ 6x_2^{(k+1)} = -x_1^{(k)} + 4 \\ -6x_3^{(k+1)} = -x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)} + 14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x_1^{(k+1)} = \frac{1}{3}(-4x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - 17) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{6}(-x_1^{(k)} + 4) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{6}(-x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)} + 14) \end{cases}$$

On peut maintenant effectuer 6 itérations.



(10)

pour  $k=0$ 

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{9}(-17) \approx -1,8889 \\ x_2^{(1)} = \frac{4}{6} - \frac{2}{3} \approx 0,6667 \\ x_3^{(1)} = \frac{-14}{6} \approx -2,3333 \end{cases}$$

pour  $k=1$ 

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{9}(-4x_2^{(1)} - x_3^{(1)} - 17) = \frac{1}{9}(-4 \times \frac{2}{3} + \frac{14}{3} - 17) \approx -1,9259 \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{6}(-x_1^{(1)} + 4) \approx \frac{1}{6}(\frac{17}{9} + 4) \approx 0,9815 \\ x_3^{(2)} = \frac{-1}{6}(-x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)} + 14) \approx -2,8704 \end{cases}$$

pour  $k=2$ 

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{1}{9}(-4x_2^{(2)} - x_3^{(2)} - 17) \approx -2,0062 \\ x_2^{(3)} = \frac{1}{6}(-x_1^{(2)} + 4) \approx 0,9877 \\ x_3^{(3)} = \frac{-1}{6}(-x_1^{(2)} + 2x_2^{(2)} + 14) \approx -2,9815 \end{cases}$$

pour  $k=3$ 

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = \frac{1}{9}(-4x_2^{(3)} - x_3^{(3)} - 17) \approx -1,9966 \\ x_2^{(4)} = \frac{1}{6}(-x_1^{(3)} + 4) \approx 1,0010 \\ x_3^{(4)} = \frac{-1}{6}(-x_1^{(3)} + 2x_2^{(3)} + 14) \approx -2,9969 \end{cases}$$

pour  $k=4$ 

$$\begin{cases} x_1^{(5)} = \frac{1}{9}(-4x_2^{(4)} - x_3^{(4)} - 17) \approx -2,0008 \\ x_2^{(5)} = \frac{1}{6}(-x_1^{(4)} + 4) \approx 0,9999 \\ x_3^{(5)} = \frac{-1}{6}(-x_1^{(4)} + 2x_2^{(4)} + 14) \approx -2,9998 \end{cases}$$



(11)

On ~~est~~ voit que avec une approximation à 4 chiffres après la virgule, que les résultats ne se stabilisent pas à 0,1 près.

Reprenons les résultats des itérations en arrondissant à 2 chiffres après la virgule.

$$\text{pour } k=0, \quad X^{(1)} = \begin{pmatrix} -1,89 \\ 0,64 \\ -2,33 \end{pmatrix}$$

$$\text{pour } k=1, \quad X^{(2)} = \begin{pmatrix} -1,93 \\ 0,98 \\ -2,81 \end{pmatrix}$$

$$\text{pour } k=2, \quad X^{(3)} = \begin{pmatrix} -2,01 \\ 0,99 \\ -2,98 \end{pmatrix}$$

$$\text{pour } k=3, \quad X^{(4)} = \begin{pmatrix} -2,00 \\ 1,00 \\ -3,00 \end{pmatrix}$$

$$\text{pour } k=4, \quad X^{(5)} = \begin{pmatrix} -2,00 \\ 1,00 \\ -3,00 \end{pmatrix}$$

Ainsi on a trouvé la solution à 0,1 près de notre système en utilisant la méthode de Sachs, en s'arrêtant à  $k=4$  dans nos itérations.



(12)

En utilisant la méthode de Gauss-Seidel:

On rappelle que l'on a permuté  $L_2$  et  $L_3$  ainsi:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & -6 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} -17 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On décompose  $A = M - N$ .

Cette fois ci on pose  $M = D - E$  et  $N = F$   
avec  $D$ , la diagonale de  $A$ .

$E$ , la matrice triangulaire inférieure avec des 0 sur la diagonale

$F$ , la matrice triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & -6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & -6 \end{pmatrix}}_{(D-E), \text{ matrice triangulaire}} - \begin{pmatrix} 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



(13)

On doit résoudre à chaque itération le système diagonal.

$$(D-E)x^{(k+1)} = Fx^{(k)} + b$$

comme  $x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix}$  alors  $Fx^{(k)} = \begin{pmatrix} -4x_2 - x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

et  $b = \begin{pmatrix} -17 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix}$  d'où  $Fx^{(k)} + b = \begin{pmatrix} -4x_2 - x_3 - 17 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix}$

$$\text{et } (D-E)x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1^{(k+1)} \\ x_1^{(k+1)} + 6x_2^{(k+1)} \\ x_1^{(k+1)} - 2x_2^{(k+1)} - 6x_3^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

De plus, on voit que les coefficients de  $E$  sont à l'ordre  $(k+1)$ :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^{(k+1)} &= -a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} + b_1 \\ \text{d'où } 3x_1^{(k+1)} &= -4x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - 17 \\ \text{De plus, } a_{21}x_1^{(k+1)} &= -a_{22}x_2^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} + b_2 \\ \text{d'où } 6x_2^{(k+1)} &= 4 - x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)} + 4 \\ \text{De plus, } a_{31}x_1^{(k+1)} &= -a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{33}x_3^{(k+1)} + b_3 \\ \text{d'où } -6x_3^{(k+1)} &= -x_1^{(k+1)} + 2x_2^{(k+1)} + 14 \end{aligned}$$

~~on voit que le système à résoudre~~

$$\begin{aligned} 3x_1 &= -4x_2 - x_3 - 17 \\ 6x_2 &= 4 - x_1 - x_3 + 4 \\ -6x_3 &= -x_1 + 2x_2 + 14 \end{aligned}$$

soit

$$x_1^{(k+1)} = \frac{-a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} + b_1}{a_{11}} = \frac{1}{3}(-4x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - 17)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{-a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} + b_2}{a_{22}} = \frac{1}{6}(4 - x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)} + 4)$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{-a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} + b_3}{a_{33}} = \frac{1}{-6}(-x_1^{(k+1)} + 2x_2^{(k+1)} + 14)$$



(14)

système si  $x$  à l'ordre  $(k+1)$  ne sont pas tous du côté gauche des équations, si l'on résout le système de haut en bas, ils seront tous calculés avant d'être utilisés.

Avec  $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , notre système est :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{3} (-4x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - 17) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{6} (4 - x_1^{(k+1)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{-1}{6} (-x_1^{(k+1)} + 2x_2^{(k+1)} + 14) \end{cases}$$

On peut maintenant effectuer les itérations :

pour  $k=0$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{3} (-4x_2^{(0)} - x_3^{(0)} - 17) = \frac{1}{3} (-17) = \frac{-17}{3} \approx -1,8889 \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{6} (4 - x_1^{(1)}) = \frac{1}{6} (4 - (-1,8889)) \approx 0,9815 \\ x_3^{(1)} = \frac{-1}{6} (-x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)} + 14) = \frac{-1}{6} (-(-1,8889) + 2(0,9815) + 14) \\ \approx -2,9753 \end{cases}$$

pour  $k=1$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{3} (-4x_2^{(1)} - x_3^{(1)} - 17) \approx -1,9945 \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{6} (4 - x_1^{(2)}) \approx 0,9991 \\ x_3^{(2)} = \frac{-1}{6} (-x_1^{(2)} + 2x_2^{(2)} + 14) \approx -2,9988 \end{cases}$$

pour  $k=2$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{1}{3} (-4x_2^{(2)} - x_3^{(2)} - 17) \approx -1,9997 \\ x_2^{(3)} = \frac{1}{6} (4 - x_1^{(3)}) \approx 1,0000 \\ x_3^{(3)} = \frac{-1}{6} (-x_1^{(3)} + 2x_2^{(3)} + 14) \approx -3,0000 \end{cases}$$



(15)

avec  $k=3$

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = \frac{1}{3} (-4x_2^{(3)} - x_3^{(3)} - 17) = -2,0000 \\ x_2^{(4)} = \frac{1}{6} (4 - x_1^{(4)}) = 1,0000 \\ x_3^{(4)} = \frac{-1}{6} (-x_1^{(4)} + 2x_2^{(4)} + 14) = -3,0000 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } X^{(4)} = \begin{pmatrix} -2,0000 \\ 1,0000 \\ -3,0000 \end{pmatrix}$$

On a donc trouvé la solution à 0,1 près de notre système en utilisant la méthode de Gauss-Seidel en s'arrêtant à  $k=3$ .

On voit que la méthode de Gauss-Seidel converge plus vite vers la solution que la méthode de Jacobi.



(16)

Exercice 8:

Soit le système linéaire

$$\begin{cases} 7x - 3y + 2z = 7 & L_1 \\ 3x + 11y - z = 2 & L_2 \\ 5x + 3y + 12z = 4 & L_3 \end{cases}$$

Méthode de Gauss.

On va procéder en deux étapes:

- transformation du système en un système triangulaire supérieur équivalent
- résolution par remontée du système.

On veut supprimer les  $x$  de  $L_3$  et  $L_2$ :

$$\begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - \frac{3}{7}L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - \frac{5}{7}L_1 \end{aligned} \quad \begin{cases} 7x - 3y + 2z = 7 \\ 0 + \frac{86}{7}y - \frac{13}{7}z = -1 \\ 0 + \frac{36}{7}y + \frac{74}{7}z = -1 \end{cases}$$

En multipliant par 7  $L_2$  et  $L_3$ 

$$\begin{aligned} L_2 &\leftarrow 7L_2 \\ L_3 &\leftarrow 7L_3 \end{aligned} \quad \begin{cases} 7x - 3y + 2z = 7 \\ 0 + 86y - 13z = -7 \\ 0 + 36y + 74z = -7 \end{cases}$$



(17)

On veut supprimer  $1f$  de  $L_3$ , ainsi :

$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{36}{86} L_2 \quad \begin{cases} 7x - 3y + 2z = 7 \\ 0 + 86y - 13z = -7 \\ 0 + 0 + \frac{3416}{43}z = \frac{-175}{43} \end{cases}$$

C'est le système triangulaire supérieur recherché.  
En simplifiant  $z$ .

$$\begin{cases} 7x - 3y + 2z = 7 \\ 0 + 86y - 13z = -7 \\ \cancel{0 + 0 + \frac{3416}{43}z} \quad z = \frac{-25}{488} \end{cases}$$

On peut donc résoudre le système :

$$\begin{cases} 7x - 3y + 2\left(\frac{-25}{488}\right) = 7 \\ 86y - 13\left(\frac{-25}{488}\right) = -7 \\ y = \frac{-25}{488} \end{cases}$$

$$\text{et } 2\left(\frac{-25}{488}\right) = \frac{-25}{244}$$

$$\text{et } -13\left(\frac{-25}{488}\right) = \frac{325}{488}$$

$$\begin{cases} 7x - 3y = 7 + \frac{25}{244} = \frac{1733}{244} \\ 86y = -7 - \frac{325}{488} = \frac{-2275}{488} \\ z = \frac{-25}{488} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x - 3y = \frac{1733}{244} \\ y = \frac{-87}{376} \\ z = \frac{-25}{488} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 3\left(\frac{-87}{376}\right) = \frac{1733}{244} \\ y = \frac{-87}{376} \\ z = \frac{-25}{488} \end{cases}$$

$$\text{et } -3\left(\frac{-87}{376}\right) = \frac{261}{376}$$



(18) d'où 
$$\begin{cases} 7x = \frac{1433}{244} - \frac{261}{976} = \frac{6671}{976} \\ y = \frac{-87}{976} \\ z = \frac{-25}{488} \end{cases}$$

Ainsi 
$$\begin{cases} x = \frac{953}{976} \approx 0,9764 \\ y = \frac{-87}{976} \approx -0,0891 \\ z = \frac{-25}{488} \approx -0,0512 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système est.

$$S = \left\{ \left( \frac{953}{976} \right); \left( \frac{-87}{976} \right); \left( \frac{-25}{488} \right) \right\}$$

Pour la méthode de Gauss-Seidel.

Voici en écriture matricielle ~~notre~~ notre système

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & 11 & -1 \\ 5 & 3 & 12 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}}_B$$

Montrons que cette méthode itérative converge.  
c'est à dire, montrons qu'elle est à diagonale strictement dominante. On va montrer que :  $\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket, |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$



(19)

Pour  $i=1$ ,  $|a_{11}|=7$  et  $|a_{12}|=3$  et  $|a_{13}|=2$

$$\text{donc } |a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}|$$

Pour  $i=2$   $|a_{22}|=11$  et  $|a_{21}|=3$  et  $|a_{23}|=1$

$$\text{donc } |a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}|$$

Pour  $i=3$   $|a_{33}|=12$  et  $|a_{31}|=5$  et  $|a_{32}|=3$

$$\text{donc } |a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}|$$

Donc  $A$  est à diagonale strictement dominante  
Ainsi la méthode de Gauss-Seidel converge

On décompose  $A = M - N$ , avec  $M = D - E$  et  $N = F$   
avec  $D$ , la diagonale de  $A$

$E$ , la matrice triangulaire inférieure avec des 0 sur la diagonale

$F$ , la matrice triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & 11 & -1 \\ 5 & 3 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ -5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 3 & 11 & 0 \\ 5 & 3 & 12 \end{pmatrix}}_{(D-E), \text{ matrice triangulaire}} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(D-E)$ , matrice triangulaire



(20)

On doit résoudre à chaque itération le système diagonal

$$(D - E)x^{(k+1)} = Fx^{(k)} + b$$

avec  $x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix}$  d'où  $Fx^{(k)} = \begin{pmatrix} 3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ 0 \end{pmatrix}$

et  $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  d'où  $Fx^{(k)} + b = \begin{pmatrix} 3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)} + 7 \\ x_3^{(k)} + 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

et  $(D - E)x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 3 & 11 & 0 \\ 5 & 3 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x_1^{(k+1)} \\ 3x_1^{(k+1)} + 11x_2^{(k+1)} \\ 5x_1^{(k+1)} + 3x_2^{(k+1)} + 12x_3^{(k+1)} \end{pmatrix}$

~~Les coefficients de E sont à l'ordre k+1.~~

Les coefficients de E sont à l'ordre k+1:

~~d'où~~  $x_1^{(k+1)} = \frac{-a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} + b_1}{a_{11}}$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{-a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} + b_2}{a_{22}}$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{-a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} + b_3}{a_{33}}$$

d'où le système :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{7} (3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)} + 7) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{11} (3x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)} + 2) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{12} (-5x_1^{(k+1)} - 3x_2^{(k+1)} + 4) \end{cases}$$

avec  $x^0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



(21)

pour  $R=0$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{4} (3x_2^{(0)} - 2x_3^{(0)} + 7) = \frac{1}{4} (7) = \frac{7}{4} = 1.75 \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{11} (-3x_1^{(1)} + x_3^{(0)} + 2) = \frac{1}{11} (-3 + 2) = \frac{-1}{11} \approx -0.0909 \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{12} (-5x_1^{(1)} - 3x_2^{(1)} + 4) = \frac{1}{12} (-5 - 3 \times \frac{-1}{11} + 4) \approx -0.0606 \end{cases}$$

pour  $R=1$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{4} (3x_2^{(1)} - 2x_3^{(1)} + 7) \approx 0.9784 \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{11} (-3x_1^{(2)} + x_3^{(1)} + 2) \approx -0.0906 \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{12} (-5x_1^{(2)} - 3x_2^{(2)} + 4) \approx -0.0517 \end{cases}$$

pour  $R=2$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{1}{4} (3x_2^{(2)} - 2x_3^{(2)} + 7) \approx 0.9760 \\ x_2^{(3)} = \frac{1}{11} (-3x_1^{(3)} + x_3^{(2)} + 2) \approx -0.0891 \\ x_3^{(3)} = \frac{1}{12} (-5x_1^{(3)} - 3x_2^{(3)} + 4) \approx -0.0511 \end{cases}$$

pour  $R=3$

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = \frac{1}{4} (3x_2^{(3)} - 2x_3^{(3)} + 7) \approx 0.9764 \\ x_2^{(4)} = \frac{1}{11} (-3x_1^{(4)} + x_3^{(3)} + 2) \approx -0.0891 \\ x_3^{(4)} = \frac{1}{12} (-5x_1^{(4)} - 3x_2^{(4)} + 4) \approx -0.0512 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } X^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.9764 \\ -0.0891 \\ -0.0512 \end{pmatrix}$$

On a ainsi trouvé la solution à 0,1 près.